Проблемы физики, математики и техники, № 4 (25), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.62

О КОНЕЧНОМЕРНЫХ И ЯДЕРНЫХ ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ H^2 НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А.Р. Миротин, Р.В. Дыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE DIMENSIONAL AND NUCLEAR OPERATORS IN HARDY SPACES H^2 ON COMPACT ABELIAN GROUPS

A.R. Mirotin, R.V. Dyba

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается связная компактная абелева группа *G* с линейно упорядоченной группой характеров. Показано, что на группе *G* существует ненулевой ганкелев оператор конечного ранга тогда и только тогда, когда ее группа характеров содержит наименьший положительный элемент. При этом условии классические теоремы Кронекера, Хартмана и Пеллера переносятся на случай ганкелевых операторов над *G*.

Ключевые слова: *компактная абелева группа*, *оператор Ганкеля*, *оператор конечного ранга*, *ядерный оператор*.

Compact and connected Abelian group *G* with totally ordered dual is considered. It is shown that nontrivial finite rank Hankel operator exists on *G* if and only if the dual group contains the first positive element. In this case the classical theorems by Kroneker, Hartman, and Peller are generalized to the case of Hankel operators on *G*.

Keywords: *compact Abelian group*, *Hankel operator*, *finite rank operator*, *nuclear operator*.

Введение

Операторы Ганкеля в пространствах Харди H^2 на группе вращений окружности, их различные реализации и аналоги активно изучались в течение нескольких последних десятилетий и нашли важные приложения, в том числе к теории функций, теории операторов, теории случайных процессов, теории рациональных приближений и теории управления (см., например, [1]–[4]). Изучались также некоторые обобщения этих операторов (см. [3]–[13] и обзор в [3, с. 195–204]), а также обобщения тесно связанных с ними операторов Тёплица и операторов Винера – Хопфа (см. [5]–[7] и библиографию там).

В данной работе рассматриваются обобщенные операторы Ганкеля, определенные в пространствах $H^2(G)$, где *G* есть нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара dx и линейно упорядоченной группой характеров X, X_+ — положительный конус в X. То же можно выразить, сказав, что в группе X выделена подполугруппа X_+, содержащая единичный характер 1 и такая, что $X_+ \cap X_+^{-1} = \{1\}$ и $X = X_+ \cup X_+^{-1}$. При этом полугруппа X_+ индуцирует в X линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi \le \chi := \chi\xi^{-1} \in X_+$. Ясно, что $X_+ = \{\chi \in X : \chi \ge 1\}$. Далее мы положим $X_- := X_+^{-1} \setminus \{1\} (= X \setminus X_+)$. Хорошо известно, что (дискретная) абелева группа X может быть линейно упорядочена тогда и только тогда, когда она не имеет кручения (см., например, [11]), что, в свою очередь, равносильно тому, что её группа характеров *G* компактна и связна [12] (при этом линейный порядок в *X*, вообще говоря, не единственен). В приложениях в роли *X* часто выступают подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, наделенные дискретной топологией, так что G является боровской компактификацией группы X (см, например, [7] и цитированную там литературу).

Статья продолжает цикл работ авторов [8]–[10]. Основной ее целью является получение для операторов Ганкеля в пространствах H^2 на компактных абелевых группах аналогов классических теорем Кронекера и Пеллера, дающих, соответственно, критерии конечномерности и ядерности операторов Ганкеля в пространствах H^2 на окружности.

1 Конечномерность операторов Ганкеля

Если в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1, то через X^i будем обозначать (бесконечную циклическую) подгруппу группы X, порожденную этим элементом (см. [5, теорема 2]). Нам понадобятся следующие простые свойства множества $X_+ \setminus X^i$ (это множество не пусто тогда и только тогда, когда группа *G* не изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$ [5, следствие 1], что мы далее и будем предполагать).

***Лемма* 1.1.** *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент* χ_1.

1) *Множество* $X_+ \setminus X^i$ *есть идеал полугруппы* X_+;

2) *для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *справедливо равенство*

$$\chi_1^k(X_+ \setminus X^i) = X_+ \setminus X^i.$$

Доказательство. 1) Включение $\chi \in X_+ \setminus X^i$ равносильно тому, что $\chi > \chi_1^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В самом деле, достаточность очевидна. Если же в доказательстве необходимости предположить, что $\chi \le \chi_1^n$ для некоторого $\chi \in X_+ \setminus X^i$ и натурального n, то получим $\chi \in X^i$ в силу выпуклости X^i [5, теорема 2]. Следовательно, если $\chi \in X_+ \setminus X^i$, то $\xi\chi > \xi\chi_1^n \ge \chi_1^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ для любых $\xi \in X_+$, а потому $\xi\chi \in X_+ \setminus X^i$.

2) Достаточно рассмотреть случай $k \in \mathbb{N}$. В силу 1) тогда имеем $\chi_1^k(X_+ \setminus X^i) \subseteq X_+ \setminus X^i$. Далее, если $\chi \in X_+ \setminus X^i$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\chi > \chi_1^{n+k}$, а потому $\chi_1^{-k}\chi > \chi_1^n$, т. е. $\chi_1^{-k}\chi \in X_+ \setminus X^i$. Значит,

$$\chi_1^{-k}(X_+ \setminus X^i) \subseteq X_+ \setminus X^i,$$

что и завершает доказательство второго утверждения.

***Определение* 1.1.** *Пространство Харди*

$$H^p(G)(1 \le p \le \infty)$$

над G определяется следующим образом (см., например, [11]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G) : \widehat{f}(\chi) = 0 \forall \chi \in X_-\},$$

где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$.

Обозначим через $H_-^2(G)$ ортогональное дополнение подпространства $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$. Тогда

$$H_-^2(G) = \{f \in L^2(G) : \widehat{f}(\chi) = 0 \forall \chi \in X_+\}.$$

Ясно, что X_+ является ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$, а X_- – ортонормированным базисом пространства $H_-^2(G)$. Через P_+ и P_- мы будем обозначать ортопроекторы из $L^2(G)$ на $H^2(G)$ и $H_-^2(G)$ соответственно.

***Определение* 1.2.** Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. *Оператором Ганкеля* (*ганкелевым оператором*) *над G с символом* φ назовем оператор

$$H_\varphi : H^2(G) \to H_-^2(G),$$

определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$ – оператор умножения на φ.

Очевидно, что оператор H_φ ограничен, причем $\|H_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. Кроме того, $H_{\varphi+\psi} = H_\varphi$, если и только если $\psi \in H^\infty(G)$.

Напомним, что функция $\theta \in H^2(G)$ называется *внутренней*, если $|\theta| = 1$.

***Определение* 1.3.** Внутреннюю функцию θ назовем *конечным произведением Бляшке на группе G*, если пространство

$$K_\theta := H^2(G) \ominus \theta H^2(G)(= (\theta H^2(G))^\perp)$$

конечномерно. При этом мы положим $\deg\theta := \dim K_\theta$.

Всюду ниже $S_\chi : H^2(G) \to H^2(G), f \mapsto \chi f$ – *оператор умножения на характер* $\chi \in X_+$.

***Теорема* 1.1.**

1. *Нетривиальный ганкелев оператор конечного ранга над G существует тогда и только тогда, когда группа X содержит наименьший положительный элемент.*

2. *Пусть ядро оператора* H_φ $(\varphi \in L^\infty(G))$ *содержит такую функцию g, для которой* $\widehat{g}(1) \ne 0$. *Оператор* H_φ *будет иметь конечный ранг тогда и только тогда, когда* $\theta\varphi \in H^\infty(G)$ *для некоторого конечного произведения Бляшке* θ, *и при этом* $\deg\theta = \operatorname{rank} H_\varphi$.

Доказательство. 1. Пусть ненулевой оператор H_φ имеет конечный ранг. Обозначим через $\tau(x)$ оператор сдвига на элемент $x \in G$ в пространстве $L^2(G)$ (и $H^2(G)$), т. е. $\tau(x)f(y) = f(xy)$. Так как $\tau(x)\chi = \chi(x)\chi(\chi \in X)$, то $\tau(x)$ коммутирует с $P_\pm$; в частности,

$$\tau(x)H_\varphi\tau(x^{-1}) = H_{\tau(x^{-1})\varphi},$$

а потому последний оператор компактен вместе с H_φ. Далее, так как $\varphi \notin H^\infty(G)$, то $\widehat{\varphi}(\chi) \ne 0$ для некоторого характера $\chi \in X_-$. В силу непрерывной (и линейной) зависимости оператора H_φ от $\varphi \in L^\infty(G)$, для любого такого характера компактный оператор

$$\int_G \chi(x) H_{\tau(x^{-1})\varphi} dx$$

(интеграл Бохнера) равен $H_{\chi * \varphi} = \widehat{\varphi}(\chi) H_\chi$, откуда следует компактность оператора H_χ (здесь мы воспользовались одной идеей из [13]). Далее, вычисляя $S_{\bar{\chi}} H_\chi \xi (\xi \in X_+)$, получаем, что компактный оператор $S_{\bar{\chi}} H_\chi$ в $H^2(G)$ является проектором на подпространство, порожденное множеством характеров $[1, \bar{\chi})$ (черта обозначает комплексное сопряжение). Значит, это множество конечно, а потому содержит наименьший положительный элемент.

Обратно, если в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1, то образом оператора $H_{\overline{\chi_1}^n}$ является пространство $\mathrm{span}\{\overline{\chi_1}^n, ..., \overline{\chi_1}\}$ (линейная оболочка множества $\{\overline{\chi_1}^n, ..., \overline{\chi_1}\}$), имеющее размерность n. В самом деле, легко проверить, что $H_{\overline{\chi_1}^n}\xi = 0 (\xi \in X_+)$, если и только если $\xi \geq \chi_1^n$. Поэтому

$$H_{\overline{\chi_1}^n}(H^2(G)) = H_{\overline{\chi_1}^n}(\mathrm{span}\{1, \overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_1}^{n-1}\}) =$$
$$= \mathrm{span}\{\overline{\chi_1}^n, ..., \overline{\chi_1}\}.$$

2. Пусть $\mathrm{rank}H_\varphi < \infty$ и $H_0 := \mathrm{Ker}H_\varphi$ содержит такую функцию g, для которой $\widehat{g}(1) \neq 0$. Так как $H_\varphi(H^2(G)) = H_\varphi(H_0^\perp)$, причем оператор $H_\varphi \mid H_0^\perp$ инъективен, то $\mathrm{rank}H_\varphi = \mathrm{dim}H_0^\perp$. Поскольку подпространство H_0 пространства $H^2(G)$ инвариантно относительно сдвигов $S_\chi(\chi \in X_+)$, по обобщенной теореме Берлинга (см., например, [11, глава 8]) найдется такая внутренняя функция θ на G, что $H_0 = \theta H^2(G)$. Следовательно, $K_\theta = \mathrm{dim}H_0^\perp < \infty$, т. е. θ есть конечное произведение Бляшке, причем $\mathrm{deg}\theta = \mathrm{rank}H_\varphi$. Наконец, $\theta \in \theta H^2(G)$, а потому $0 = H_\varphi\theta = P_-(\theta\varphi)$. Значит, $\theta\varphi \in H^\infty(G)$.

Обратно, если $\theta\varphi \in H^\infty(G)$ для некоторого конечного произведения Бляшке θ, то $H_{\theta\varphi} = 0$, т. е. $H_\varphi(\theta f) = 0$ при всех $f \in H^2(G)$. Значит, $\theta H^2(G) \subseteq H_0$, а стало быть, $H_0^\perp \subseteq K_\theta$. Таким образом, $\mathrm{dim}H_0^\perp < \infty$, а выше было показано, что $\mathrm{rank}H_\varphi = \mathrm{dim}H_0^\perp$.

***Замечание* 1.1.** Условие, что ядро оператора H_φ содержит такую функцию g, для которой $\widehat{g}(1) \neq 0$, в части 2 предыдущей теоремы использовалось лишь при доказательстве необходимости.

***Следствие* 1.1.** *Если θ — конечное произведение Бляшке, и $h \in H^\infty(G)$, то* $\mathrm{rank}H_{\overline{\theta}h} < \infty$.

Ввиду утверждения 1 теоремы 1.1 далее мы будем предполагать, что в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1.

Для доказательства критерия конечномерности нам понадобится еще следующее обобщение классической леммы Бёрлинга, описывающей корневые подпространства сопряженного оператора $S_{\chi_1}^*$ (ниже через $\mathbb{D}$ обозначен открытый единичный круг комплексной плоскости; $\mathrm{span}M$ – линейная оболочка множества M).

***Лемма* 1.2** [2, с. 52]. 1. *Любое число $\lambda \in \mathbb{D}$ является собственным значением оператора $S_\chi^*(\chi \in X_+, \chi \neq 1)$, и отвечающие ему собственные функции имеют в точности вид $g/(1-\lambda\chi)$, где $g \in H^2(G), g \neq 0$, причем $\widehat{g}$ сосредоточено на $[1, \chi)$.*

2. *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1. Тогда точечный спектр оператора $S_{\chi_1}^*$ равен $\mathbb{D}$, и при всех $\lambda \in \mathbb{D}$ и натуральных n*

$$\mathrm{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^n = \mathrm{span}\left\{\frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k} : 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Доказательство. 1. Заметим, что $\sigma(S_\chi^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, так как $\left\|S_\chi^*\right\| = 1$. Если число $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ есть собственное значение оператора $S_\chi^*(\chi \in X_+, \chi \neq 1)$, то, учитывая, что $S_i^* = P_+S_{\overline{\chi}}$, и приравнивая коэффициенты Фурье функций $S_\chi^* f$ и

$$\lambda f (f \in H^2(G), f \neq 0),$$

получаем, что $\widehat{f}(\eta\chi) = \lambda\widehat{f}(\eta)(\eta \in X_+)$, что равносильно тому, что преобразование Фурье функции $f(1-\lambda\chi)\chi^{-1}$ сосредоточено на X_-. Если мы положим $g := f(1-\lambda\chi)$, то это значит, что $\widehat{g}$ сосредоточено на $[1, \chi)$. При $\lambda \in \mathbb{D}$ получаем требуемый вид собственных функций, отвечающих λ.

2. При $\chi = \chi_1$ из только что доказанного утверждения 1 леммы следует, что функция $\widehat{g}$ сосредоточена на $\{1\}$, т. е. g есть константа, отличная от 0. Если мы предположим, что $\lambda \in \mathbb{T}$ есть собственное значение оператора $S_{\chi_1}^*$, то по доказанному выше $g = f(x)(1-\lambda\chi_1(x))$ при всех $x \in G$, что невозможно, так как χ_1 принимает значение $1/\lambda$ ($\chi_1(G)$ есть нетривиальная связная подгруппа группы $\mathbb{T}$).

Докажем последнее утверждение леммы индукцией по n. При $n = 1$ оно уже доказано. Предположим, что оно верно при некотором n, и рассмотрим функцию $f \in \mathrm{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^{n+1}$. Так как $(S_{\chi_1}^* - \lambda I)f \in \mathrm{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^n$, то по предположению

$$(S_{\chi_1}^* - \lambda I)f = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k}.$$

Но легко проверить, что

$$\frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k} = (S_{\chi_1}^* - \lambda I)\frac{\chi_1^k}{(1-\lambda\chi_1)^{k+1}}.$$

Поэтому

$$(S_{\chi_1}^* - \lambda I)\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\chi_1^k}{(1-\lambda\chi_1)^{k+1}}\right) = 0,$$

откуда по доказанному выше найдется такая константа c_0, что

$$f - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\chi_1^k}{(1-\lambda\chi_1)^{k+1}} = \frac{c_0}{1-\lambda\chi_1},$$

что и требовалось доказать.

***Следствие* 1.2** (ср. [3, с. 216, лемма 2.4.4]). *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1. Если θ — конечное произведение Бляшке, то для некоторого конечного множества $E \subset \mathbb{D}$ и подходящих натуральных $k(\lambda), \lambda \in E$ имеем*

$$K_\theta = \operatorname{span}\left\{\frac{\chi_1^k}{(1-\lambda\chi_1)^{k+1}} : 1 \le k \le k(\lambda), \lambda \in E\right\}.$$

Доказательство. Это следует из найденного выше вида корневых подпространств оператора $S_{\chi_1}^*$ и того факта, что конечномерное пространство есть прямая сумма корневых подпространств действующего в нем оператора (в данном случае речь идет о пространстве K_θ и операторе $S_{\chi_1}^* \mid K_\theta$).

Теперь мы можем перенести на наш случай теорему Кронекера. В связи с этим напомним, что если рациональная функция R представлена в виде несократимой дроби p/q, то степенью функции R называется число

$$\deg R = \max\{\deg p, \deg q\}.$$

Через $H_{\chi_1}^2$ мы будем обозначать гильбертово подпространство пространства $H^2(G)$ с (ортонормированным) базисом $\{\chi_1^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Ясно, что отображение $i : f \mapsto f \circ \chi_1$ есть изоморфизм гильбертовых пространств $H^2(\mathbb{T})$ и $H_{\chi_1}^2$. Обозначим также через P_1 оператор ортогонального проектирования пространства $H^2(G)$ на $H_{\chi_1}^2$.

***Теорема* 1.2**. *Пусть в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1. Пусть ядро оператора $H_\varphi (\phi \in L^\infty(G))$ содержит такую функцию g, для которой $\hat{g}(1) \ne 0$. Оператор H_φ будет иметь конечный ранг тогда и только тогда, когда $P_-\varphi = R \circ \chi_1$, где R есть рациональная функция, все полюсы которой принадлежат $\mathbb{D}$. При этом* $\operatorname{rank} H_\varphi = \deg R$.

Доказательство. Необходимость. Как и в доказательстве теоремы 1.1, найдется такая внутренняя функция θ, что $\operatorname{Ker} H_\varphi = \theta H^2(G)$. Если оператор H_φ имеет конечный ранг, то пространство $K_\theta = (\operatorname{Ker} H_\varphi)^\perp = H_\varphi^*(H_-^2(G))$ конечномерно, т. е. θ – конечное произведение Бляшке. В силу следствия 1.2 K_θ состоит из композиций рациональных функций с полюсами вне $\mathbb{D}$ и характера χ_1. Поэтому найдется такая рациональная функция r, все полюсы которой расположены вне $\mathbb{D}$, что $r \circ \chi_1 = H_\varphi^* \overline{\chi_1} = P_+(\overline{\varphi\chi_1})$. Но для любой функции $f \in L^2(G)$ справедливо равенство

$$P_+\overline{f} = \overline{P_- f} + \overline{\hat{f}}(1).$$

Следовательно, для некоторой константы c имеем $r \circ \chi_1 = \overline{P_-(\varphi\chi_1)} + c$, откуда

$$P_-(\varphi\chi_1) = \overline{r} \circ (1/\chi_1) - \overline{c} = r_1 \circ \chi_1,$$

где r_1 есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в $\mathbb{D}$. С другой стороны, $P_-(\varphi\chi_1) = (P_-\varphi)\chi_1 - c_1 \quad (c_1 = \hat{\varphi}(\chi_1^{-1}))$. Из двух последних равенств вытекает, что $P_-\varphi = R \circ \chi_1$, где $R(z) = (r_1(z) + c_1)/z$.

Достаточность. Пусть $P_-\varphi = R \circ \chi_1$, где R – рациональная функция, все полюсы которой принадлежат $\mathbb{D}$. Как известно, существует конечное произведение Бляшке B на группе $\mathbb{T}$, такое, что $\deg B = \deg R$ и

$$F(z) := B(z)R(z) \in H^\infty(\mathbb{T})$$

(в качестве нулей произведения Бляшке нужно взять полюсы функции R с учетом их кратностей).

Покажем, что функция $\theta := B \circ \chi_1$ есть конечное произведение Бляшке на группе G, причем $\deg\theta = \deg B$. В самом деле, поскольку функции из $(H_{\chi_1}^2)^\perp$ – это в точности те функции из $H^2(G)$, которые разлагаются в ряд Фурье по характерам из $X_+ \setminus X^i$, из утверждения 2 леммы 1.1 следует, что $(B \circ \chi_1)(H_{\chi_1}^2)^\perp = (H_{\chi_1}^2)^\perp$. Поэтому

$$\theta H^2(G) = (B \circ \chi_1)H^2(G) = ((B \circ \chi_1)H_{\chi_1}^2) \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp.$$

Стало быть,

$$K_\theta = H^2(G) \ominus \theta H^2(G) =$$
$$= (H_{\chi_1}^2 \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp) \ominus ((B \circ \chi_1)H_{\chi_1}^2 \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp) =$$
$$= H_{\chi_1}^2 \ominus (B \circ \chi_1)H_{\chi_1}^2 \cong H^2(T) \ominus BH^2(T),$$

($\cong$ обозначает изоморфизм гильбертовых пространств), а потому θ – конечное произведение Бляшке и $\deg\theta = \deg B$.

В силу теоремы 1.1 и доказанного выше

$$\operatorname{rank} H_\varphi = \deg\theta = \deg B = \deg R,$$

что и требовалось доказать.

***Замечание* 1.2.** Как и в теореме 1.1, условие, что ядро оператора H_φ содержит такую функцию g, для которой $\hat{g}(1) \ne 0$, в теореме 1.2 использовалось лишь при доказательстве необходимости.

2 Компактность и ядерность операторов Ганкеля

Равносильность условий 1 и 3 в следующем обобщении теоремы Хартмана может быть получена с помощью теоремы 1.2 работы [13]. Ниже предложено другое доказательство, основанное на редукции к классическому случаю.

***Теорема* 2.1**. *Обозначим через* $K_1(G)$ *замкнутую подалгебру алгебры* $L^\infty(G)$, *порожденную элементом* $\overline{\chi_1}$. *Пусть* $\varphi \in L^\infty(G)$. *Следующие утверждения равносильны*:

1) *оператор* H_φ *компактен*;

2) $P_-\varphi \in K_1(G)$;

3) $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$.

Доказательство. Пусть оператор H_φ компактен и отличен от нуля. Как показано в начале доказательства теоремы 1.1, в этом случае из неравенства $\hat{\varphi}(\chi) \neq 0$ для характера $\chi \in X_-$ следует, что множество $[1, \chi^{-1})$ конечно, а потому X содержит наименьший положительный элемент χ_1. Кроме того, из конечности этого промежутка вытекает, что $\chi \in X^i$ и $\chi = \overline{\chi_1}^n, n \in \mathbb{N}$ (см. [5]). Следовательно, имеет место разложение в ряд Фурье $P_-\varphi = \sum_{n=1}^\infty c_n \overline{\chi_1}^n$. Если мы положим

$$\varphi_1(z) := \sum_{n=1}^\infty c_n \overline{z}^n, z \in T,$$

то $\varphi_1 \in H^2_-(\mathbb{T})$ и $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$. Легко проверить, что изоморфизм i гильбертовых пространств $H^2(\mathbb{T})$ и $H^2_{\chi_1}$ переводит оператор H_{φ_1} в компактный оператор $H_{P_-\varphi} \mid H^2_{\chi_1}$. Следовательно, по классической теореме Хартмана $\varphi_1 = g + h$, где функция g непрерывна на $\mathbb{T}$, а $h \in H^\infty(\mathbb{T})$. Выберем последовательность полиномов $p_n(z)$, равномерно на $\mathbb{T}$ сходящуюся к функции $g(\overline{z})$. Тогда

$$P_-\varphi \circ \chi_1 = \varphi_1 \circ \chi_1 = g \circ \chi_1 + h \circ \chi_1 \in K_1(G) + H^\infty(G),$$

поскольку последовательность $p_n \circ \overline{\chi_1}$ равномерно на G сходится к $g \circ \chi_1$. Осталось заметить, что $K_1(G) \subset H^2_-(G)$, и потому $P_-\varphi \in K_1(G)$.

Предположим теперь, что $P_-\varphi \in K_1(G)$. Так как $K_1(G) \subset C(G) \subset L^\infty(G)$, то

$$P_+\varphi = \varphi - P_-\varphi \in L^\infty(G).$$

Таким образом, $P_+\varphi \in H^\infty(G)$, и, стало быть, $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$.

Наконец, пусть

$$\varphi = g + h, g \in K_1(G), h \in H^\infty(G),$$

и последовательность полиномов p_n такова, что последовательность $p_n \circ \overline{\chi_1}$ равномерно сходится к g. Тогда

$$\left\| H_\varphi - H_{p_n \circ \overline{\chi_1}} \right\| = \left\| H_g - H_{p_n \circ \overline{\chi_1}} \right\| =$$
$$= \left\| H_{g - p_n \circ \overline{\chi_1}} \right\| \le \left\| g - p_n \circ \overline{\chi_1} \right\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty),$$

причем операторы $H_{p_n \circ \overline{\chi_1}}$ имеют конечный ранг в силу теоремы 1.2. Следовательно, оператор H_φ компактен.

Идущее ниже следствие другим методом было установлено в [13].

***Следствие* 2.1.** *Множество* $K_1(G) + H^\infty(G)$ *есть замкнутая подалгебра алгебры* $L^\infty(G)$.

В самом деле, замкнутость этого пространства сразу следует из теоремы 2.1, а его устойчивость относительно умножения – из тождества, аналогичного тождеству (1.3) в [13].

Для формулировки еще одного следствия теоремы 2.1 дадим, имитируя [1],

***Определение* 2.1.** Введем *пространство функций Бесова аналитического типа* на группе G следующим образом:

$$B_1(G) = \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{1 - \lambda_n \chi_1} : |\lambda_n| < 1, \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|} < \infty \right\}.$$

Напомним, что оператор в банаховом пространстве является ядерным, если он может быть разложен в сходящийся по норме ряд операторов ранга один.

Теперь, применяя, как и в доказательстве теоремы 2.1, редукцию к классическому случаю, мы можем перенести на G известный результат В.В. Пеллера (см. [1]) о ядерности ганкелевых операторов на группе $\mathbb{T}$.

***Теорема* 2.2**. *Пусть* $\varphi \in L^\infty(G)$. *Оператор* H_φ *является ядерным*, *если и только если*

$$\overline{P_-\varphi} \in B_1(G).$$

Доказательство. Пусть

$$\overline{P_-\varphi} = \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{1 - \lambda_n \chi_1},$$

и выполняются условия

$$|\lambda_n| < 1, \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|} < \infty.$$

В силу непрерывности отображения

$$L^\infty(G) \to LB(H^2(G), H^2_-(G)), \varphi \mapsto H_\varphi,$$

оператор $H_\varphi (= H_{P_-\varphi})$ имеет представление

$$H_\varphi = \sum_{n=1}^\infty H_{\psi_n},$$

где

$$\psi_n = \frac{\overline{c_n}}{1 - \overline{\lambda_n \chi_1}},$$

причем

$$\sum_{n=1}^\infty \left\| H_{\psi_n} \right\| \le \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|},$$

а в силу теоремы 2.1 $\operatorname{rank} H_{\psi_n} = 1$.

Обратно, если оператор $H_\varphi = H_{P_-\varphi}$ является ядерным, то, если мы положим, как в доказательстве теоремы 2.1, $\varphi_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{z}^n (z \in \mathbb{T})$, то $\varphi_1 \in H^2_-(\mathbb{T})$ и $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$. При этом, так как изоморфизм i^{-1} гильбертовых пространств $H^2_{\chi_1}$ и $H^2(\mathbb{T})$ (см. доказательство теоремы 2.1) переводит оператор $H_{P_-\varphi} \mid H^2_{\chi_1}$ в H_{φ_1}, оператор H_{φ_1} тоже ядерный, а потому [1] $\overline{\varphi_1} \in B_1(\mathbb{T})$. С учетом равенства $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$ отсюда сразу следует, что $\overline{P_-\varphi} \in B_1(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пеллер*, *В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. – Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 1028 с.

2. *Никольский*, *Н.К.* Лекции об операторе сдвига / Н.К. Никольский. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

3. *Nikolski*, *N.K.* Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading: in 2 vol. / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. I. – 461 p.

4. *Nikolski*, *N.K.* Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading: in 2 vol. / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. II. – 439 p.

5. *Миротин*, *А.Р.* Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами / А.Р. Миротин // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 5. – С. 101–116.

6. *Adukov*, *V.* Wiener-Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group / V. Adukov // Int. Eq. Oper. Th. – 1993. – № 16. – P. 305 – 332.

7. *Ehrhardt*, *T.* Factorization in Weighted Wiener Matrix Algebras on Linearly Ordered Abelian Groups / T. Ehrhardt, C. van der Mee, L. Rodman, I. Spitkovski // Int. Eq. Oper. Th. – 2007. – Vol. 58, № 1. – P. 65–86.

8. *Миротин*, *А.Р.* Свойства операторов Ганкеля над положительным конусом линейно упорядоченных абелевых групп / А.Р. Миротин, Р.В. Дыба // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 1. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 37–38.

9. *Миротин*, *А.Р.* Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах / А.Р. Миротин, Р.В. Дыба // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 135–144.

10. *Дыба*, *Р.В.* Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров / Р.В. Дыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (8). – С. 57–60.

11. *Rudin*, *W.* Fourier analysis on groups / W. Rudin. – New York and London: Intersciense Publishers, 1962. – 285 p.

12. *Понтрягин*, *Л.С.* Непрерывные группы, 2-е изд. / Л. С. Понтрягин – М.: ГИТТЛ, 1954. – 515 с.

13. *Yan Chaozong*. Hankel operators and Hankel algebras / Yan Chaozong, Chen Xiaoman, Guo Kunyu // Chin. Ann. of Math. – 1998. – 19 B, № 1. – P. 65–76.

Поступила в редакцию 28.10.15.